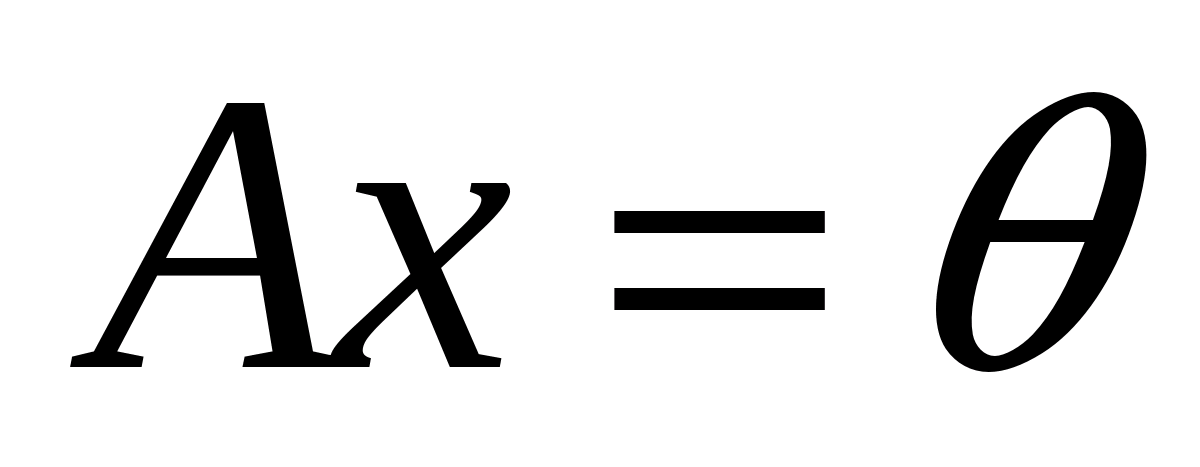
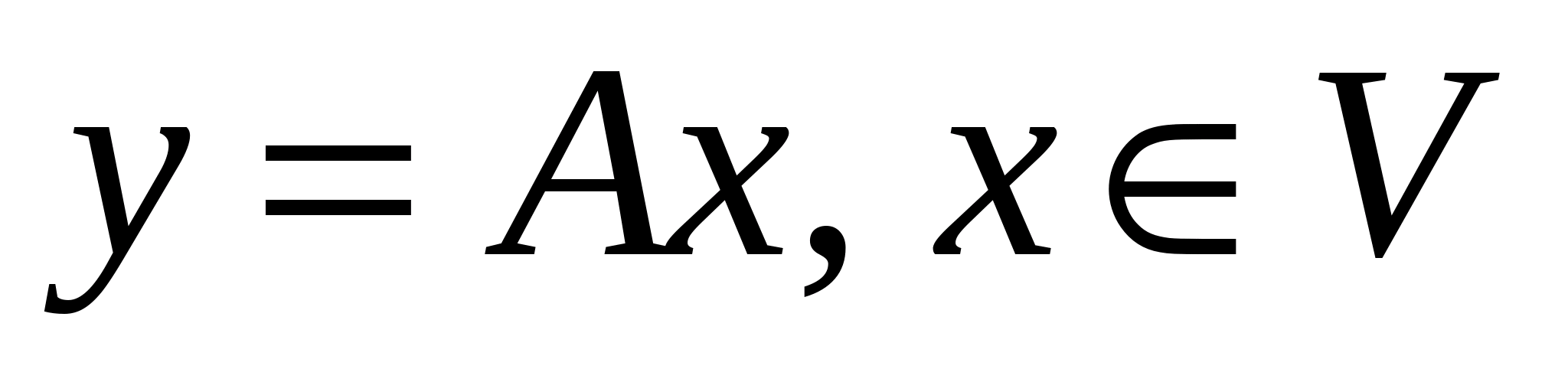
# Номер IV

1. Что такое пространство ?  
   Пространство многочленов степени не больше n
2. Докажите, что множество многочленов n-й степени не является линейным пространством.  
     
   В этом вопросе есть ловушка. Здесь говорится не о пространстве многочленов, степень которых не ниже n, а просто множество многочленов n-й степени. А это значит, что мы можем сложить 2 вектора, принадлежащих нашему множеству, и “выйти” из этого множества. Например,

получится многочлен .

1. Что такое канонический базис в пространстве ?  
     
   Это упорядоченная комбинация векторов, состоящая из

Что такое ядро, образ, дефект, ранг оператора? Как ищутся ядро и образ?  
  
Совокупность всевозможных векторов  для которых  называется **ядром оператора**  и обозначается .  
  
Совокупность всевозможных векторов вида  называется **образом оператора**  и обозначается Im*A.*   
  
**Дефект оператора –** размерность ядра  
  
**Ранг оператора** – размерность образа  
  
**Алгоритм нахождения образа**  
Пусть линейный оператор задан в некотором базисе матрицей A. Чтобы найти базис подпространства , надо привести к ступенчатому виду матрицу . Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом пространства , а число этих строк — его размерностью.  
  
**Алгоритм нахождения ядра**  
Пусть линейный оператор задан в некотором базисе матрицей A. Чтобы найти базис подпространства , надо найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений, основная матрица которой есть A. Она и будет базисом пространства , а число векторов в ней — его размерностью.  
  
**Алгоритм нахождения ядра и образа(Алгоритм Чуркина)**Признаюсь, мой метод весьма нестандартный. Попробую его доказать. Алгоритм, который я использую, называется алгоритмом Чуркина (я не пытаюсь доказать авторитетом, просто сказал, как он называется). Матрица ниже состоит из двух частей. Слева матрица оператора, справа – единичная матрица.

Элементарными преобразованиями приводим матрицу слева к ступенчатому виду. Я утверждаю, что

1. Ненулевые строки левой матрицы образуют базис образа оператора .
2. Строки правой матрицы, которые являются продолжением нулевых строк левой матрицы, образуют базис ядра оператора .

Докажем первое утверждение:

Сначала докажем, что линейно зависимые столбцы матрицы образуют ядро.

По определению матрицы оператора, столбцы матрицы — это координатные столбцы образов базисных векторов.

Итак, мы помним, что матрицу оператора мы получаем с помощью применения оператора к векторам базиса. Допустим, мы построили матрицу оператора в некотором базисе , где

Очевидно, линейно зависимые столбцы (т. е. те столбцы, которые можно выразить через другие) являются ядром оператора, а линейно независимые – образом. (Есть линейно зависимые строки – det A = 0 – не существует обратного оператора – ядро не пусто (здесь имеется в виду, что помимо нулевого вектора в ядре содержатся еще другие вектора)

А если линейно зависимые столбцы образуют ядро, то линейно независимые – образ.

Транспонируем матрицу, чтобы работать со строчками, а не столбцами (так в нашем случае удобнее)

Докажем второе утверждение:

Представим, что правой части матрицы имеем базис , координаты вектора которых выглядят как (0, . . ., 0, 1, 0, . . ., 0), где 1 стоит на i-м месте. Поэтому можно считать, что единичная матрица, стоящая в правой части матрицы, есть матрица, в которой по строкам записаны координаты векторов в базисе, составленном из этих векторов.   
  
Вспоминая определение матрицы оператора, получаем, что в левой половине i-й строки матрицы стоят координаты вектора () в базисе .   
  
Итак, наша матрица обладает следующим свойством: если в правой части какой-то строки этой матрицы стоят координаты некоторого вектора x в базисе , то в левой части этой строки стоят координаты вектора в том же базисе.   
  
Это свойство сохраняется при элементарных преобразованиях матрицы засчет линейности оператора. Обозначим через строки правой матрицы, являющиеся продолжениями нулевых строк левой матрицы. В силу сказанного выше () = 0, т. е. ∈ для . Очевидно, что векторы линейно независимы (До элементарных преобразований это была единичная матрица). Из первого утверждения вытекает, что k + = n (т. е. количество нулевых строк + количество ненулевых строк = количество строк. Гениально.). Но k = dim Ker A.  
  
Итак, — линейно независимый набор векторов из , число векторов в котором равно размерности этого подпространства. Эти векторы образуют базис .

Заметим, что вектор имеет в базисе координаты (0, . . ., 0, 1, 0, . . ., 0), где 1 стоит на i-м месте. Поэтому можно считать, что единичная матрица, стоящая в правой части матрицы, есть матрица, в которой по строкам записаны координаты векторов в базисе, составленном из этих векторов(причем базис будет каноническим)   
  
Значит в левой половине i-й строки матрицы стоят координаты вектора () в базисе .   
  
Итак, матрица обладает следующим свойством: если в правой части какой-то строки этой матрицы стоят координаты некоторого вектора x в базисе , то в левой части этой строки стоят координаты вектора в том же базисе.   
  
Это свойство сохраняется при элементарных преобразованиях матрицы(линейность!). Обозначим через строки матрицы , являющиеся продолжениями нулевых строк матрицы . В силу сказанного выше () = 0, т. е. ∈ для всякого i = 1, 2, . . . , k. Далее, можно проверить, что векторы линейно независимы. Из первого утверждения вытекает, что .Но   
  
Итак, — линейно независимый набор векторов из , число векторов в котором равно размерности этого подпространства. Эти векторы образуют базис .

1. Как ищутся ядро и образ в случае обратимого оператора? Почему?  
     
   Ядро нулевое, а образ – это все пространство.  
     
   Если существует обратный оператор, то мы из любого вектора, принадлежащего образу, можем “вернутся” с помощью обратного оператора к изначальному вектору. Но это невозможно, если некоторые векторы переходят в ноль(векторы, принадлежащие ядру). Значит, либо у оператора нулевое ядро, и он обратимый, либо у оператора ненулевое ядро, и он необратимый.
2. Как связаны ранг, дефект и размерность пространства?